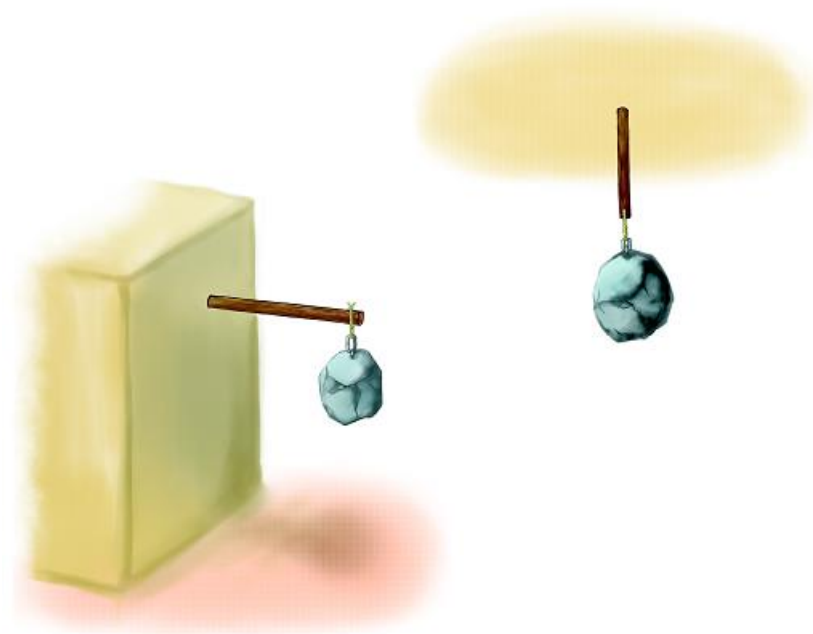


物体の変形と応力を
計算するための

新しい材料力学



まえがき

物体に力が作用すると、物体は変形し、運動を始める。力の変化が緩やかで、やがて定常状態に達すれば、物体は力が作用する前とは別な安定な状態に達する。その時の物体の変形の様子や物体が受けているストレスの大きさを調べ、その健全性を評価するのが材料力学の役割である。

材料力学は、構造物や機械の剛性と強度を推定するための重要な道具である。材料力学という学問の範囲は極めて曖昧であるが、基礎となっているのは、力のつり合いを考察したり、はりのたわみや応力を調べたり、それに必要な力学や数学および材料に関する知識であることにまちがいない。

どこまでの範囲を材料力学とよび、どこからを構造力学や弾性学など別の名前でよぶかは人によってまちまちである。

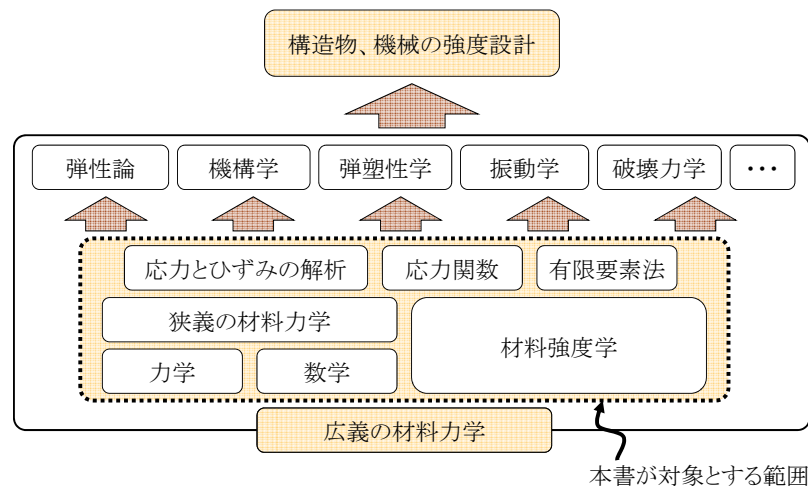


図 1: 著者の考える材料力学の範囲

「元来材料力学というのは名は体を充分に表していない(原語だって同様である)。弾性学、塑性学、流性学、強度学などを基礎として、機械や建設工学での実際の設計に役立たせるために、適当な簡素化、単純化を加えた実用的な学問である。」¹ や「材料力学は、機械・構造物の各部に生じる応力、ひずみの状態を明らかにし、その剛さ・強さを評価する学問であるとされている。対象とする現象より見ると、弾性学・構造力学・弾性振動学・塑性力学・材料強度学・土質力学・粘弾性学などの広い範囲の学問分野にわたっており、材料力学という言葉は、このような学問群の総称とみなされることがあり、また、そうした学問分野で得られた知識を再構成した、構造設計の基礎の学と考えられることもある。狭義の材料力学は後者をさすのであろうが、ここではそうした詮索は意味がないものと考えておきたい。…」² という意見もある。

このように広範囲の内容を一冊の教科書に著すことは困難で、材料力学、弾性論、材料強度学などの多くの分野に細分されて書かれることになる。

しかし、それぞれの教科書は、当然著者が違うし、物理量を表す記号や数式の表記方法も記述内容とその順序も異なるので、技術者はそれらの違いを乗り越えて自分の中で材料力学の全体像を描きつつ理解していかなければならない。このような作業は、大変な努力を要することが予想される。

¹ 「材料力学史 (History of Strength of Materials)」 S. P. Timoshenko 著, 最上武雄 監訳/川口昌弘 訳の推薦の言葉 (倉西正嗣)

² 「技術のこころ (一)」 日本機械学会編 丸善

「こんな教科書があればあんなに苦労しなかったのに」という自分自身の思い³から、本書には、物体の変形と応力を計算する方法を自然の法則を理解することから始めて具体的な手法に至るまでの筋道をできるだけ関連付けて記述した。その範囲は、図1の破線で囲んだ広義の材料力学の基礎となっている部分である。その先の高度な問題はそれぞれの専門の教科書に譲ることにする。

従来の「材料力学」の教科書とは内容と構成が大幅に異なるので、「新しい材料力学」というタイトルにした。残念ながら、本書が著者の意図を十分反映したものとなっていないとしたら、それはひとえに著者の力不足によるものである。読者のご寛容を乞う。

2017年6月21日

中本 昭

³ 中本，新しい材料力学の教科書，(社)日本工学教育協会平成23年度工学教育研究講演会講演論文集 P.602-603

本書の構成

物体の運動や変形と力の間には一定の法則があり，その内容は数学で記述される⁴。これらの法則に基づいて物体の変形と応力を計算することになるが，大別して3通りの方法がある。

1. 応力のつり合い式とひずみの適合条件式および応力とひずみの関係式を連立させて解析的に解く方法。適用できる範囲は狭いが，2次元問題の場合はエアリの応力関数などを利用して解ける場合がある。
2. 解析的に解く代わりに仮想仕事の原理などを適用して数値的に解く方法。有限要素法に代表される方法で，3DCADとの親和性が高く適用範囲が広いので設計現場では便利なツールとして使われている。
3. あらかじめ部材の変形モードを仮定した上で力と変形の関係を調べる方法。はりの曲げたわみを計算する方法はその典型で，きわめて実用性の高い方法である。

本書は，物体の運動や変形と力に関する法則を理解し，変形と応力を計算する上記3つの方法について学んだのちに材料固有の強度を学ぶ構成にした。最後には，実務に材料力学を応用する場合に注意すべきことと材料力学に必要な数学をまとめた。著者自身が理解しにくかったところを丁寧に説明しているので，くどいと感じる方は読み飛ばして次に進んでください。

各章の具体的な内容は，以下のとおりである。

- 第1章では，材料力学を学ぶ目的とCAEの利用効果について考える。
- 第2章では，高校時代の物理を思い出しながら運動の法則を理解する。
- 第3章では，力の性質や基本的な運動の形態を調べ，運動を理解する上で有用な物理量とそれらの関係について学ぶ。
- 第4章では，第2,3章の成果を質点系や剛体の運動に適用して，これらの運動方程式がどのように表現されるのかを学ぶ。
- 第5章からは運動に加えて変形する物体の特徴について学ぶ。まず，線形弾性体の変形を考える場合の前提条件を整理し，力と変形の関係や外力と内力について考える。
- 第6章では，棒の問題を取り上げて，変形モードを仮定すると力と変形の関係がどのように表現できるか考え，具体的な問題を解いてみる。上記3.の方法。
- 第7章は，3次元物体の応力とひずみを定義して，応力のつり合い式とひずみの適合条件式および応力とひずみの関係式を導く。また，数値的に解を求める時に重要な役割を果たす仮想仕事の原理と最小ポテンシャルエネルギーの原理について学ぶ。上記1.の方法。
- 第8章は，2次元問題を取り上げて，エアリの応力関数を利用して解析的に解を得る方法について学ぶ。上記1.の方法。
- 第9章は，有限要素法を学ぶ準備として，力と変位の関係を剛性方程式で表現し，剛性マトリックスの作り方と特徴，剛性方程式の解き方について学ぶ。上記2.の方法。

⁴言葉や絵で表現できるかもしれないが，数学ほど簡潔で正確に表現することはできないだろう。

- 第 10 章は、有限要素法による解析の流れを見た後、簡単な問題を手計算の有限要素法で解く。有限要素法を学ぶ一番の早道は有限要素法のプログラムを制作することであるが、その時間が取れない方にはこの方法をお奨めする。上記 2. の方法。
- 第 11 章は、材料の強さ、材料の破壊モード、破壊基準の考え方について学ぶ。金属材料をあつかう方は、降伏、転位、耐久限度などについて知っておいてほしい。
- 第 12 章は、実務で材料力学を使うときの注意点について整理した。材料力学や有限要素法は、モデル化された問題を自然界の法則と様々な仮定に基づいて解く方法であって、モデル化が妥当かどうか、結果が信用できるかどうかを検証するのは技術者自身である。
- 第 13 章には、材料力学と関係の深い数学をまとめた。数学が苦手な方は、この章を参考にしながら読み進めてください。
- 第 14 章は、材料力学を勉強するのは初めてで、材料力学のイメージがよくつかめないという方のために、材料力学固有の言葉や考え方になじんでいただくための章です。読み物として気軽に読んでください。

材料力学に現れる物理量は、数学用語で言えばスカラー、ベクトル、テンソルなどである。スカラーは A, a などと表記し、ベクトルとテンソルは太字で \mathbf{A}, \mathbf{a} と表記する。ベクトルの大きさは $|\mathbf{A}|, |\mathbf{a}|$ などと書いて、これはスカラーである。ベクトルの成分は $\mathbf{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ などと $\{ \}$ あるいは $()$ で囲んで示す。テンソルと行列の成分は $\mathbf{A} = [A] = [a_{ij}]$ と書くことにする。

材料力学の考え方をより深く理解するために練習問題と章末問題を用意したので、計算用紙をたくさん用意してぜひトライしてほしい。ただし、問題によっては解くための条件や寸法、材料定数などが不十分な場合がありうる。もちろん、原因は著者の不手際であるが、現実問題では往々にして起こりえることであり、そのための練習と割り切って自分で適宜設定していただくようお願いする。

材料力学についてより専門的なことを勉強したい方は、253 ページに著者がお世話になった文献のリストを記載しているので参考にしてください。

目次

まえがき	i
本書の構成	iii
第 1 章 なぜ材料力学を学ぶのか	1
1.1 設計者自身のために	1
1.2 CAE の効果を引出すために	2
第 2 章 物体の運動の法則	3
2.1 物体	3
2.2 運動の表示	4
2.3 ニュートンの法則	5
2.4 慣性系と非慣性系	7
2.5 次元と単位	8
コラム a. 万有引力の法則	9
コラム b. 慣性質量と重量質量	10
第 2 章 問題	11
第 3 章 質点の運動	13
3.1 質点に作用する力	13
3.2 いろいろな運動	13
3.2.1 等速度運動	13
3.2.2 等加速度運動	13
3.2.3 回転運動	13
3.3 いろいろな力	14
3.3.1 重力	14
3.3.2 ばねの力	16
3.3.3 抵抗力	16
3.3.4 摩擦力	17
3.3.5 回転にともなう力	18
3.3.6 質点の運動を調べる手順	18
3.4 運動に関係する量	19
3.4.1 いろいろな物理量	19
3.4.2 運動量	19
3.4.3 力積	20
3.4.4 仕事	20
3.4.5 運動エネルギー	21
3.4.6 保存力	22
3.4.7 ポテンシャルエネルギー	23
3.5 力学的エネルギー保存の法則	24

3.6 角運動量	24
コラム c. モーメント	26
3.7 回転	27
第 3 章 問題	29
第 4 章 質点系と剛体の運動	33
4.1 2 質点系の運動	33
4.2 多質点系の運動	35
4.3 剛体の運動	38
4.4 剛体に作用する力の合成	39
4.4.1 図式合成方法	39
4.4.2 成分合成法	41
4.5 剛体の回転運動	42
4.5.1 平面内の回転運動	42
4.5.2 空間内の回転運動	43
第 4 章 問題	45
第 5 章 静止した物体の反応	47
5.1 前提とする考え方	47
5.1.1 物質	47
5.1.2 連続	48
5.1.3 微小	48
5.1.4 弾性	49
5.1.5 均質, 等方性	49
5.2 線形弾性体の変形	50
5.3 外力と内力	50
5.4 棒の引張り	53
5.4.1 棒の応力	53
5.4.2 外力による仕事とひずみエネルギー	54
5.4.3 ねじの力学	55
コラム d. 重ね合わせの原理	57
コラム e. サンプソンの原理	58
第 5 章 問題	59
第 6 章 棒の変形と応力	61
6.1 変形と応力の考え方	61
6.2 内力と応力の関係	64
6.2.1 棒を引張った場合	64
6.2.2 はりを曲げた場合	64
6.2.3 棒をねじった場合	65
6.2.4 断面 2 次モーメント	65
コラム f. 断面 1 次モーメントと図心	67
6.3 棒のねじり	68
6.4 はりの曲げ	70
6.5 はりのたわみ	72
6.5.1 せん断力と曲げモーメントの性質	72
6.5.2 はりのせん断力と曲げモーメント	73

6.5.3	境界条件	74
6.5.4	片持ちはりのたわみ	75
6.5.5	両端支持はりのたわみ	77
6.5.6	不静定はりのたわみ	78
6.5.7	せん断力によるはりのたわみ	79
6.6	ひずみエネルギーに関する定理	82
6.6.1	曲げとねじりのひずみエネルギー	82
6.6.2	複数の外力による仕事	82
6.6.3	マクスウエルの相反定理	83
6.6.4	カスティリアーノの定理	84
6.6.5	最小仕事の原理	86
	コラム g. ベルヌーイ・オイラーの仮定	88
6.7	座屈	89
	第 6 章 問題	91
第 7 章	物体の変形と応力	95
7.1	コーシーの応力	95
7.1.1	2次元のコーシー応力	95
7.1.2	3次元のコーシーの応力	98
7.2	応力テンソルの特徴	101
7.2.1	応力テンソルと座標系	101
7.2.2	応力テンソルの固有値と不変量	102
7.2.3	応力テンソルが満たすべき条件	103
7.2.4	モールの応力円	105
7.3	物体の運動と変形	106
7.3.1	微小ひずみ	106
7.3.2	工学ひずみ	107
7.3.3	大きなひずみ	108
7.3.4	ひずみテンソルの固有値と不変量	108
7.4	応力とひずみの関係式	110
7.5	エネルギー原理	112
7.5.1	ひずみエネルギー	112
7.5.2	仮想仕事の原理	114
7.5.3	最小ポテンシャルエネルギーの原理	116
7.5.4	一様断面棒の引張り	118
7.6	連続体の運動方程式	119
	第 7 章 問題	120
第 8 章	2次元応力問題	123
8.1	2次元応力状態	123
8.1.1	平面応力	123
8.1.2	平面ひずみ	123
8.1.3	軸対称	124
8.2	応力関数	125
8.2.1	エアリの応力関数	125
8.2.2	多項式の応力関数	125

8.2.3	応力関数の極座標表示	127
8.3	接触応力	129
8.3.1	くさびの先端に作用する力	129
8.3.2	半無限板の直線辺に作用する力	131
8.3.3	剛体ポンチの押し込みによる接触応力	132
8.3.4	ヘルツの接触応力	132
8.4	切欠き周りの応力	133
8.4.1	円孔の周りの応力	133
8.4.2	クラックの周りの応力	134
8.4.3	応力拡大係数	136
	コラム h. 静的，準静的，振動，動的，衝撃	137
	第 8 章 問題	138
第 9 章	マトリックス法	139
9.1	剛性方程式	139
9.1.1	ばね	139
9.1.2	2 つのばね	140
9.1.3	剛性マトリックスの性質	141
9.1.4	剛性方程式を解く	142
9.1.5	剛性マトリックスの座標変換	143
9.1.6	多種類のばねで構成される構造物	144
9.2	棒とはりの剛性方程式	145
9.3	カスティリアーノの定理を使う	147
9.4	仮想仕事の原理を使う	148
	第 9 章 問題	149
第 10 章	有限要素法	151
10.1	有限要素解析のイメージ	151
10.2	3 角形要素による解析	154
10.3	平板の引張	157
	コラム i. 分布荷重の等価節点力	165
	コラム j. 先端半径ゼロの応力集中	166
	第 10 章 問題	167
第 11 章	材料の強さ	169
11.1	材料試験	170
11.1.1	引張試験	170
11.1.2	疲労試験	177
11.1.3	衝撃試験	179
11.1.4	硬度試験	180
11.2	材料強度理論	181
11.2.1	転位	183
11.2.2	弾性破損の法則	184
11.2.3	材料の強化	186
11.3	疲労強度	186
11.3.1	疲労限度線図	186
11.3.2	切欠き効果	188

11.3.3	寸法効果	188
11.3.4	組合せ応力下の疲労強度	188
11.3.5	接触応力下の疲労強度	189
11.3.6	線形累積疲労損傷則	189
11.3.7	低サイクル疲労	189
11.3.8	疲労き裂の進展	190
11.4	強度設計	191
第 11 章 問題		192
第 12 章 モデル化の要点と結果の検証		193
12.1	強度設計の原則	193
12.1.1	力の流れはスムーズか?	193
12.1.2	遊んでいる部材はないか?	194
12.1.3	力は面内力で支えているか?	196
12.1.4	熱応力が発生する	197
12.1.5	接合部には注意!	197
12.2	解析モデルの作成	198
12.2.1	解析の目的を明らかにする	198
12.2.2	どんな問題としてあつかうのか?	198
12.2.3	解析の準備	199
12.2.4	モデルの作成	199
12.3	結果の検証	204
12.3.1	大域的な変形, 応力はよいか?	204
12.3.2	解は収束しているか?	204
12.3.3	応力分布は妥当か?	204
12.3.4	前提条件は維持されているか?	205
12.3.5	実物は図面とあっているか?	205
12.3.6	外力の大きさは適切か?	205
12.4	Verification & Validation	205
12.5	CAE 十か条	206
第 13 章 材料力学と関係の深い数学		207
13.1	関数	207
13.1.1	基本的な関数	207
13.1.2	指数関数と対数関数	208
13.1.3	三角関数	208
13.1.4	オイラーの公式	210
13.2	微分と導関数	210
13.2.1	関数の極限	211
13.2.2	導関数の公式	211
13.2.3	テーラーの定理	212
13.2.4	偏微分	212
13.2.5	全微分	213
13.3	関数の積分	214
13.4	定積分	214
コラム k. 微小量 Δx と微分 dx		217

13.5	ベクトル	218
13.5.1	ベクトルの合成と分解	218
13.5.2	スカラー積	219
13.5.3	ベクトル積	220
13.5.4	ベクトルの微分	221
コラム 1.	ベクトルの掛け算	222
13.6	行列	223
13.6.1	行列の定義	223
13.6.2	行列の算法	223
13.6.3	座標変換	226
13.6.4	行列の固有値	227
コラム m.	行列	230
コラム n.	自明な解	231
13.7	概算と検算	232
第 13 章	問題	234
第 14 章	初めての材料力学	239
14.1	棒の引張り	240
14.2	力の大きさとつり合い	241
14.3	棒の応力とひずみ	242
14.4	単位	243
14.5	断面積が一樣でない棒のひずみ	244
14.6	大きな力, 大きな変形	246
14.7	仕事とエネルギー	247
14.8	単純な構造物	248
	あとがき	251
	参考文献	253

第1章 なぜ材料力学を学ぶのか

1.1 設計者自身のために

設計者の仕事は、新しい製品のアイデアを考え、多くの制約条件の下でそのアイデアを実現できる機構、構造、材料などを構想し、その中で最適な仕様を決定してそれらの情報を図面や材料仕様書、その他の書類に記載して次の工程に渡すことであるといえる。図 1.1。

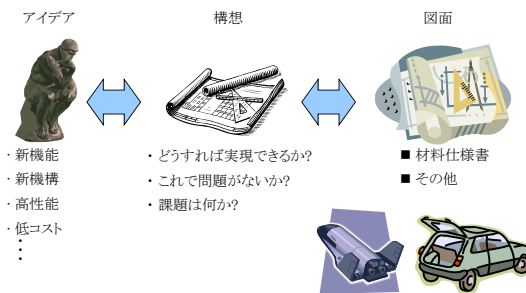


図 1.1: 設計者の仕事

機構、構造、材料などを構想する段階では、その時点では姿かたちのない未来の製品が、想定したとおりの機能、強度、剛性、信頼性を発揮し、不測の事態に対しても十分な余裕を持ってユーザの満足と安全を確保できることを検証しなければならない。そのための手段は図 1.2 のように複数用意されている。

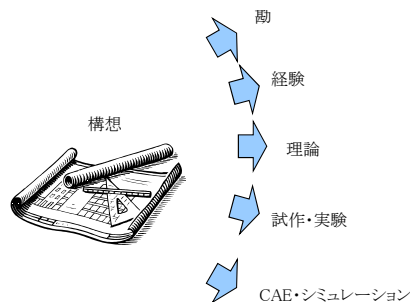


図 1.2: 設計検証の手段

一般に、工業製品には、高性能、高機能、低価格、

短期開発、安全性、環境対応など多くのことが求められる、今では CAE を利用しない設計手法は考えられない。

CAE の中核をなす有限要素法¹ という手法は、ボーイング社が亜音速航空機の後退翼の振動解析を行うために開発した数値解析手法で、任意形状の構造物の変形や応力を求めることが可能で、解が理論解に収束するという特徴をもつ革命的な手法であった。

その後、様々な工学分野で手法の開発が進み、コンピュータの驚異的な発展もあって、CAE (Computer Aided Engineering) という一大工学分野を形成している。最先端の研究成果を織込んだ汎用 CAE ソフトウェアがいくつも販売されていて、計算結果はコンピュータグラフィックスによって視覚的にわかりやすく美しく表示される。3次元 CAD との親和性にも優れていて、材料力学に関する知識がそれほどなくても、CAD で図面を描きながら変形や応力を簡単にチェックできるしくみが用意されている。初心者でも容易に使えることをセールスポイントにしている CAE システムも多い。

このような状況からは、CAE システムさえあれば設計業務が効率よく進むような印象を受けるが、CAE システムを利用するための計算モデルを準備するのは設計者であり、CAE システムが出力した結果を判断するのも設計者であることを忘れてはならない。図 1.3。

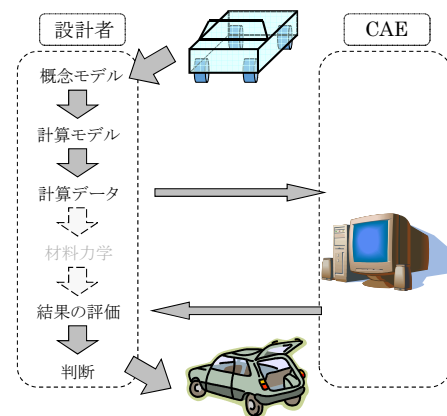


図 1.3: 設計者と CAE の役割分担

CAE システムを利用するしないに拘わらず、設計した製品の健全性を保証するのは設計者の義務で

¹M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp, *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol.23, No.9, 1956

ある。

強度設計を担当する設計者は材料力学をきちんと学んでおかなければならないことは言うまでもないが、その理由をもう一度整理すると次の3つになる。

第1の理由は、製品の健全性を検討する手段とその限界を理解しておくことである。

構造物や機械は、しばしば思いもよらない原因で破損して経済的な損害を与え、場合によっては貴重な人命を失うことがあることは歴史上多くの事例が示している²。

第2の理由は、材料力学を学ばなかに製品が遭遇するいろいろな状況を想定できる豊かな想像力を身につけて、危険を未然に見い出す能力を身につけることである。

技術開発に失敗は付きものだが、だからこそ過去の失敗を忘れずに同じ失敗を繰り返さないことと未知の事故を可能な限り想定する努力が求められる。

第3の理由は、先人の残した構造物や機械を眺めるだけでなく、先人の知恵と努力あるいは失敗に気づき、構造物や機械を介して会話し、先人の経験を自分のものにできる準備をしておくことである。

図1.4は国宝の瑠璃光寺五重塔である。このような木造の構造物が建築後600年近くに亘ってその美しさを保っていることは驚きである。



図 1.4: 瑠璃光寺五重塔 (山口市)

ガリレオ・ガリレイ以来多くの科学者・技術者が作り上げてきた材料力学を学ぶことは、自然の法則の精巧さとその美しさを知ることでもあり、それ自体が大きな楽しみになることを願っている。

²一例をあげると、タコマ橋の崩落、リバティ船の破壊、コメット機の墜落など。

1.2 CAEの効果を引出すために

有限要素法やCAEの発展によって強度設計能力は大きく向上し、製品開発期間の短縮、製品開発費用の低減、製品品質の向上に寄与してきた。しかし、同時に、材料力学の知識と豊富な設計経験を有する多数の技術者がその活動を支えたことも忘れてはならない³。

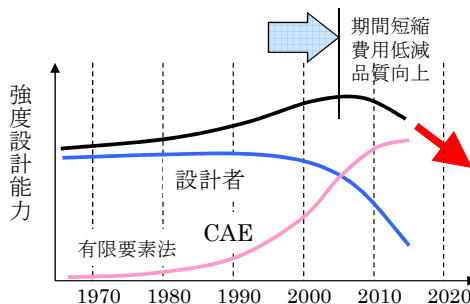


図 1.5: 強度設計能力の変遷

図1.5は、そのイメージと著者の危機感をグラフ化したものである。

CAEシステムが極めて高い能力を獲得した結果、CAEシステムさえあれば優れた製品が作れるかのような錯覚を生んだことも否定できない。解析担当者が入力データを作り計算結果を設計担当者に渡して設計を進めるという分業スタイルが当たり前になって、力の流れや変形モードをイメージして構造をデザインしたり、設計案を慎重に検証して工学的判断を下すという技術者本来の作業がおろそかになっている。

その結果、設計のやり直しや市場不具合が増えて、本来の開発期間短縮、開発費用低減、品質向上といった目的が達成されているのか疑わしくなっている。

経営者、管理者は高価なCAEシステムを導入して安心するのではなく、今まで以上に技術者の能力向上に配慮し、CAEシステムを道具として使いこなせる技術者を育成することが重要である。

³中本，材料力学の勉強を始めよう，日本機械学会 技術と社会部門講演会講演論文集,2014,P.29-30